УДК 519.854.2

ЗАДАЧА МІНІМІЗАЦІЇ СУМАРНОГО ВІДХИЛЕННЯ ВІД СПІЛЬНОГО ДИРЕКТИВНОГО СТРОКУ ПРИ ВИКОНАННІ ЗАВДАНЬ ПАРАЛЕЛЬНИМИ ПРИСТРОЯМИ

магістрант, Годна А. В.,

кандидат технічних наук, доцент, Жданова О. Г.,

магістрант, Маленко А. О.,

кандидат технічних наук, старший викладач, Сперкач М. О.

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Україна, Київ

У статті розглядається задача теорії розкладів, у якій необхідно скласти розклад виконання завдань зі спільним директивним строком паралельними пристроями за критерієм мінімізації сумарного відхилення моментів завершення завдань від директивного строку. Особливістю задач, які розглядаються, є те, що немає обмежень на початок виконання завдань (на момент запуску розкладу). У роботі розглядаються два випадки: в першому пристрої є ідентичними, а в другому – пропорційними, тобто такими, що відрізняються швидкістю роботи. Окремо розглядається частковий випадок, коли в обслуговуючій системі є тільки один пристрій. Для усіх задач розроблено алгоритм побудови оптимального розкладу. Наведено приклади розв'язання розглянутих задач.

Ключові слова: розклад, директивний строк, момент запуску, паралельні пристрої, ідентичні пристрої, пропорційні пристрої, запізнення, випередження, мінімізація сумарного відхилення.

магистрант, Годная А. В., кандидат технических наук, доцент, Жданова Е. Г., магистрант, Маленко А. А., кандидат

технических наук, старший преподаватель, Сперкач М. О. Задача минимизации суммарного отклонения от общего директивного срока при выполнении заданий параллельными приборами / Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского», Украина, Киев

В статье рассматривается задача теории расписаний, в которой необходимо составить расписание выполнения заданий с общим директивным сроком параллельными устройствами по критерию минимизации суммарного отклонения моментов завершения заданий от директивного срока. Особенностью задач, которые рассматриваются, является то, что нет ограничений на начало выполнения заданий (на момент запуска расписания). В работе рассматриваются два случая: в первом устройства идентичны, а во втором - пропорциональны, то есть такие, которые отличаются скоростью работы. Отдельно рассматривается частный случай, когда в обслуживающей системе есть только одно устройство. Для всех задач разработан алгоритм построения оптимального расписания. Приведены примеры решения рассмотренных задач.

Ключевые слова: расписание, директивный срок, момент запуска, параллельные приборы, идентичные приборы, пропорциональные приборы, запаздывание, опережение, минимизация суммарного отклонения.

undergraduate, Hodna A. V., PhD, associate professor, Zhdanova O. G., undergraduate, Malenko A. O., PhD, senior lecturer, Sperkach M. O. The problem of minimizing the total deviation of ending times of performing task for common due date by parallel machines / National

Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Ukraine, Kyiv

The article presents the problem of scheduling theory, in which it is necessary to schedule the tasks with a common due date on several parallel machines by the criterion of minimizing the total deviation of the completion of tasks from the due date. Problem's main feature is that there are no restrictions on the beginning of the tasks execution (at the schedule's launch time). Two cases are considered in the article: in the first device are identical, and in the second - are proportional, that is, those that differ in the speed of work. Servicing system with only one device is considered as a corner case. Optimal scheduling algorithm has been developed for all considered problems. Algorithm usage examples are provided.

Key words: schedule, due date, release date, parallel machines, identical machines, proportional machines, tardiness, earliness, minimizing the total deviation.

Постановка задачі. Задано множину завдань $I = \{1,2,..,i,.,n\}$ та кількість пристроїв m. Пристрої працюють паралельно, є взаємозамінними і відрізняються один від одного продуктивністю виконання завдань. Пристрої можна впорядкувати за швидкістю виконання завдання і цей порядок однаковий для всіх завдань. Для кожного пристрою j, $j=\overline{1,m}$ задано коефіцієнт продуктивності h_j такий, що тривалість виконання завдання i на пристрої j дорівнює $h_j p_i$. «Еталонним» будемо називати пристрій з коефіцієнтом продуктивності $h=1$. У цьому випадку величина p_i є тривалістю виконання завдання i на еталонному пристрої. Величина h_j –

коефіцієнт продуктивності пристрою j (якщо $h_j > 1$, то пристрій j менш продуктивний, ніж еталонний, якщо $h_j < 1$ – більш продуктивний).

Передбачається, що всі завдання множини I надходять одночасно в нульовий момент часу та мають спільний директивний строк d, процес обслуговування кожного завдання проходить без переривань до завершення обслуговування. Пристрої можуть починати свою роботу в ненульовий момент часу. Необхідно побудувати розклад, що мінімізує сумарне відхилення виконання завдань від директивного строку.

Введемо наступні позначення:

W_i − тривалість очікування завданням i початку його виконання;

$C_i = p_i + W_i$ – момент закінчення завдання;

$Z_i = \max\{0,\ C_i - d\}$ − запізнення завдання;

$E_i = \max\{0,\ d - C_i\}$ − випередження завдання;

$Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i$ – сумарне запізнення;

$E = \sum_{i=1}^{n} E_i$ – сумарне випередження.

З урахуванням позначень, цільова функція задачі (сумарне відхилення моментів закінчення завдань від директивного строку) має вигляд: $E + Z \to \min$

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Планування роботи завжди було складним завданням у різних сферах людської діяльності. Задача календарного планування виконання завдань декількома пристроями з метою мінімізації сумарного відхилення від директивних строків широко вивчалася науковцями, про що свідчать праці [1-4]. Зазвичай задачі мінімізації сумарного відхилення належать до класу NP.

Результати досліджень часткового випадку задачі (коли в обслуговуючій системі є тільки один пристрій) висвітлено у роботах [5-9]. Робота [8] присвячена дослідженню задачі теорії розкладів мінімізації сумарного запізнення для одного пристрою з метою знаходження нових властивостей оптимальних розкладів загального і деяких окремих випадків задачі, побудови на їх основі нових алгоритмів вирішення даної задачі, а в публікації [9] розглянуто алгоритм розв'язання задачі мінімізації сумарного випередження і запізнення завдань на одному пристрої з налагодженнями, залежними від послідовності, та оцінено його ефективність. Також і для складних систем, коли завдання виконуються декількома ідентичними або пропорційними пристроями, розв'язується задача мінімізації сумарного відхилення від директивних строків [2-4]. У роботі [4] розглянуто та проаналізовано методи вирішення задачі мінімізації сумарного часу запізнювання завдань з директивними строками виконання на обчислювальному ресурсі. Досліджено евристичні алгоритми вирішення задачі на основі рангового підходу. Проведені обчислювальні експерименти щодо обґрунтування ефективності досліджуваних алгоритмів на основі розрахунку відносної похибки та часу реалізації для різної кількості завдань вхідної черги. Доведена можливість використання алгоритмів в системах реального часу. Результати отримані різними науковцями свідчать про актуальність проблеми та потребу в її подальшому дослідженні.

Мета статті. Метою роботи є дослідження задачі мінімізації сумарного відхилення від директивного строку виконання завдань декількома пристроями за умови, що початок виконання завдань (момент запуску розкладу) може бути довільним.

У роботі розглядаються два випадки, коли завдання виконуються:

1) декількома ідентичними пристроями ($h_1 = h_2 = ... = h_m = 1$);

2) декількома пропорційними пристроями.

Спочатку розглянемо частковий випадок, коли в обслуговуючій системі є тільки один пристрій. Він є наглядним і результати, що будуть отримані для нього, є корисними і будуть використані нами для систем з декількома пристроями.

Складання розкладу для одного пристрою ($m=1$)

Нехай маємо деякий розклад виконання завдань одним пристроєм. Введемо наступні позначення:

Q – множина завдань, що запізнюються: $Q = \{i \mid C_i > d\}$, $|Q| = q$;

$\lfloor 1 \rfloor$ – номер завдання, що є першим за порядком в послідовності завдань, що запізнюються;

$\lfloor i \rfloor$ – номер завдання, що є i-тим за порядком в послідовності завдань, що запізнюються;

W – множина завдань, що виконуються з випередженням: $W = \{i \mid C_i \le d\}$), $|W| = w$ (завдання, у якого випередження дорівнює 0, будемо відносити до множини W);

$\lceil 1 \rceil$ – номер завдання, що є першим в послідовності завдань множини W, якщо рахувати від директивного строку справа наліво по часової осі (є першим з кінця в упорядкуванні завдань множини W);

$\lceil i \rceil$ – номер завдання, що є i-тим в послідовності завдань множини W, якщо рахувати від директивного строку справа наліво по часової осі (є i-тим з кінця в упорядкуванні завдань множини W).

Будемо вважати, що немає завдання, яке «розривається» директивним строком (тобто починається до директивного строку, а закінчується після нього). Передбачається також, що момент запуску

$u = d - \sum_{i \in W} p_i$ може бути більше 0 (тобто початок розкладу може бути зсунений вправо від нульового моменту часу) і директивний строк має таке значення, що є достатній люфт для можливих значень моменту запуску.

Рисунок 1 ілюструє введені позначення.

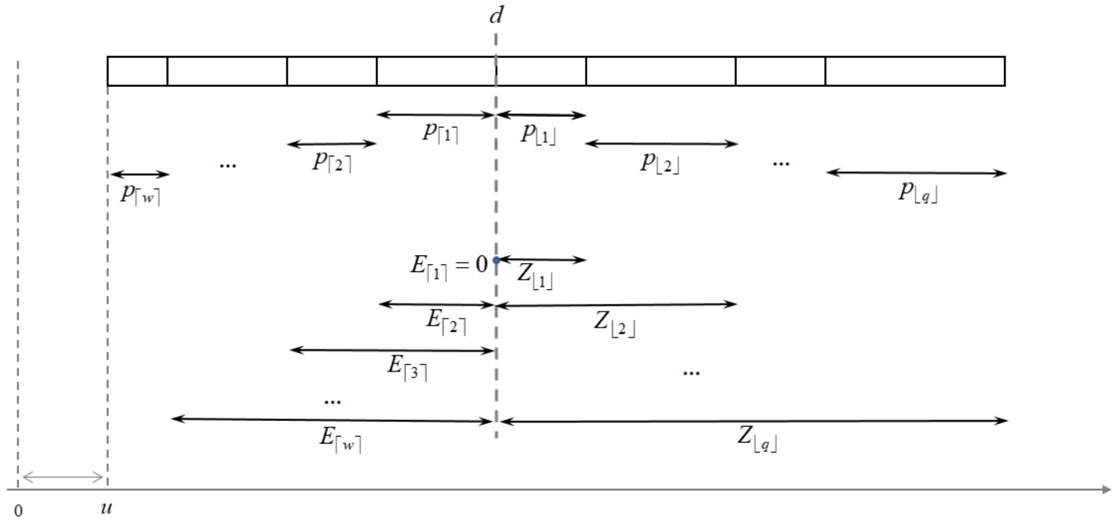


Рис. 1. Основні позначення та нумерація завдань у розкладі

Сумарне випередження завдань у розкладі:

$$E = \sum_{i \in W} E_i = \sum_{k=1}^{w} E_{\lceil k \rceil} = E_{\lceil 1 \rceil} + E_{\lceil 2 \rceil} + E_{\lceil 3 \rceil} + \ldots E_{\lceil w \rceil} = 0 + p_{\lceil 1 \rceil} + (p_{\lceil 1 \rceil} + p_{\lceil 2 \rceil}) + \ldots + (p_{\lceil 1 \rceil} + p_{\lceil 2 \rceil} + \ldots + p_{\lceil w-1 \rceil}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{w-1} \sum_{i=1}^{k} p_{\lceil k \rceil} = \sum_{i=1}^{w-1} (w-i) p_{\lceil i \rceil}.$$

Сума $\sum_{i=1}^{w-1} (w-i) p_{\lceil i \rceil}$ не містить доданка, що відповідає $p_{\lceil w \rceil}$ (оскільки ця величина не впливає на значення $E_{\lceil 1 \rceil}, E_{\lceil 2 \rceil}, \ldots, E_{\lceil w \rceil}$), введемо доданок, що відповідає $p_{\lceil w \rceil}$, в цю суму з коефіцієнтом 0: $E = \sum_{i=1}^{w} (w-i) p_{\lceil i \rceil}$.

Сумарне запізнення завдань: $Z = \sum_{i \in Q} Z_i = \sum_{k=1}^{q} Z_{\lfloor k \rfloor} = \sum_{k=1}^{q} \sum_{i=1}^{k} p_{\lfloor k \rfloor} = \sum_{i=1}^{q} (q-i+1) p_{\lfloor i \rfloor}$.

Отже, цільова функція (ЦФ) визначається так: $E + Z = \sum_{i=1}^{w} (w-i) p_{\lceil i \rceil} + \sum_{i=1}^{q} (q-i+1) p_{\lfloor i \rfloor}$

Як бачимо, $E+Z$ являє собою суму n доданків, кожний з яких є добутком цілого числа на тривалість завдання. Кожна з n тривалостей бере участь у сумуванні один раз, а цілі числа (коефіцієнти цільової функції при тривалостях) мають такі значення

$$\begin{matrix} w-1, w-2, \ldots, 2, 1, 0 \\ q, q-1, \ q-2, \ldots, 2, 1. \end{matrix}.$$

На рисунку 2 показано відповідність цих чисел позиціям завдань у розкладі (позицією будемо вважати порядковий номер завдання у розкладі).

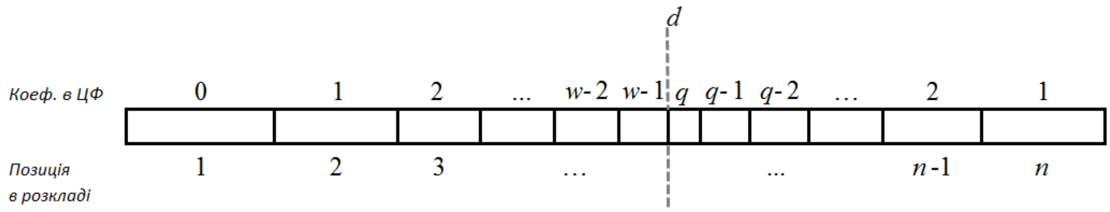


Рис. 2. Відповідність коефіцієнтів ЦФ та позицій завдань у розкладі

Відомо, що сума попарних добутків двох числових послідовностей приймає мінімальне значення, коли одна з послідовностей не спадає, а інша – не зростає [10]. Отже, величина сумарного відхилення $E+Z$ буде мінімальною, якщо послідовність тривалостей не спадатиме, а послідовність цілих чисел не зростатиме. З урахуванням цього можна виділити такі властивості оптимального упорядкування завдань:

1) існує тільки один коефіцієнт зі значенням 0 і він повинен бути при найбільшій тривалості p_i;

2) існує два коефіцієнти зі значеннями 1 і вони повинні бути при двох наступних найбільших значеннях p_i; це означає, що:

- одне з цих завдань повинно належати множині Q (запізнюватись), тобто воно повинно бути останнім в упорядкуванні;

- інше завдання повинно належати множині W (випереджати директивний строк), тобто воно в оберненому упорядкуванні повинно бути передостаннім (якщо рахувати від директивного строку справа наліво), тобто фактично бути другим в загальній послідовності;
- байдуже, яке з цих завдань буде запізнюватись, а яке буде виконуватись з випередженням;

3) існує два коефіцієнти зі значеннями 2 і вони повинні бути при двох наступних найбільших значеннях p_i і так далі;

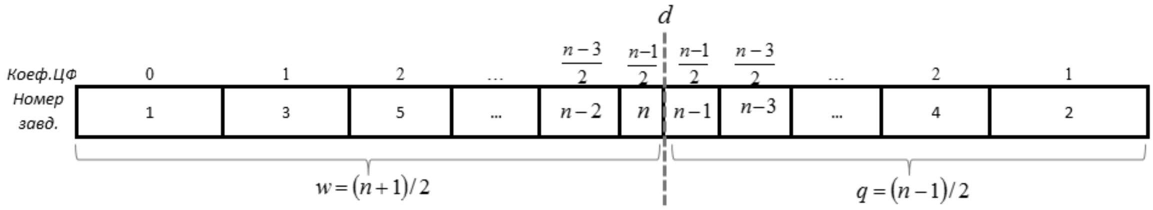
4) якщо n є непарним числом, то $w-1=q=\dfrac{n-1}{2}$ (або $w=q+1$), тобто кількість завдань, що виконуються з ненульовим випередженням, дорівнює кількості завдань, що запізнюються (рисунок 3.а); якщо n є парним числом, то $w=q$ (рисунок 3.б);

5) є одне завдання $i=\lceil 1 \rceil$ у якого $E_i+Z_i=0$;

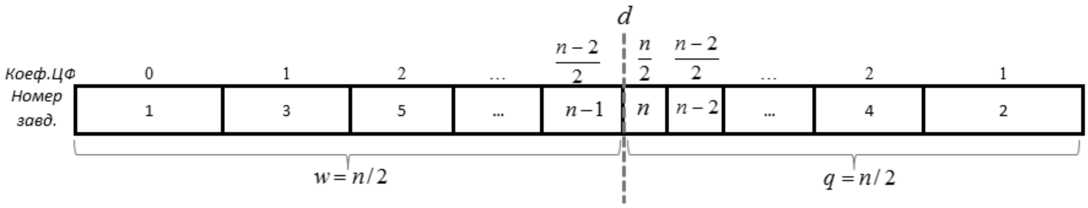
З урахування властивостей 2) - 3) кількість альтернативних оптимальних розкладів становить $2^{(n-2)/2}$, якщо n є парним числом, і $2^{(n-1)/2}$, якщо n є непарним.

Нехай завдання перенумеровані за незростанням тривалостей: $p_1 \geq p_2 \geq ... \geq p_n$.

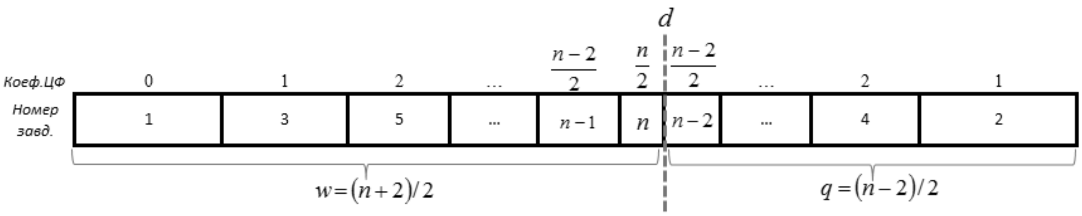
На рисунку 3 показані варіанти оптимальних розкладів виконання завдань для непарного та парного n (тут і далі на діаграмах Ганта у прямокутниках вказані номери завдань, а над ними - відповідні їм коефіцієнти цільової функції). Так у розкладі для непарного n (рис. 3а) завдання, що включаються до множини Q (запізнюються), мають парні номери від 2 до *n*-1, а завдання, що включаються до множини W (випереджають), мають непарні номери від 1 до *n*. Якщо поміняти місцями завдання, яким відповідають однакові значення коефіцієнтів ЦФ, сумарне значення відхилень не зміниться (розклад залишиться оптимальним).



а) n є непарним числом



б) n є парним числом (варіант 1)



в) n є парним числом (варіант 2)

Рис. 3. Розподіл завдань в оптимальному розкладі

Зсув розкладу вліво/вправо на величину Δ ($\Delta < p_{\lceil 1 \rceil}$ і $\Delta < p_{\lfloor 1 \rfloor}$), який призводить до «розриву» одного з завдань директивним строком, не призводить до покращення значення цільової функції. Тому, достатньо розглядати лише ті розклади, в яких завдання «не розриваються» директивним строком, тим самим зменшуючи можливу кількість альтернативних розкладів.

Складання розкладу для декількох ідентичних пристроїв

Розглянемо тепер випадок, коли в системі є $m>1$ ідентичних пристроїв. Будемо розглядати розклади, в яких немає завдань, що починаються до директивного строку і закінчуються після нього.

Введемо позначення:

Q_j – множина завдань, що запізнюються на пристрої j,

$\left|Q_j\right| = q_j$, $j = \overline{1,m}$;

$j\lfloor i \rfloor$ – номер завдання, що виконується на пристрої j та є i-тим за порядком в послідовності завдань, що запізнюються на цьому пристрої;

W_j – множина завдань, що на пристрої j виконуються з випередженням, $\left|W_j\right| = w_j$, $j = \overline{1,m}$ (завдання, у якого на пристрої j випередження дорівнює 0, будемо відносити до множини W_j);

$j\lceil i \rceil$ – номер завдання, що є i-тим з кінця в упорядкуванні завдань з множини W_j (на пристрої j є i-тим в послідовності завдань множини W_j, якщо рахувати від директивного строку справа наліво по часовій осі).

Рисунок 4 ілюструє ці позначення.

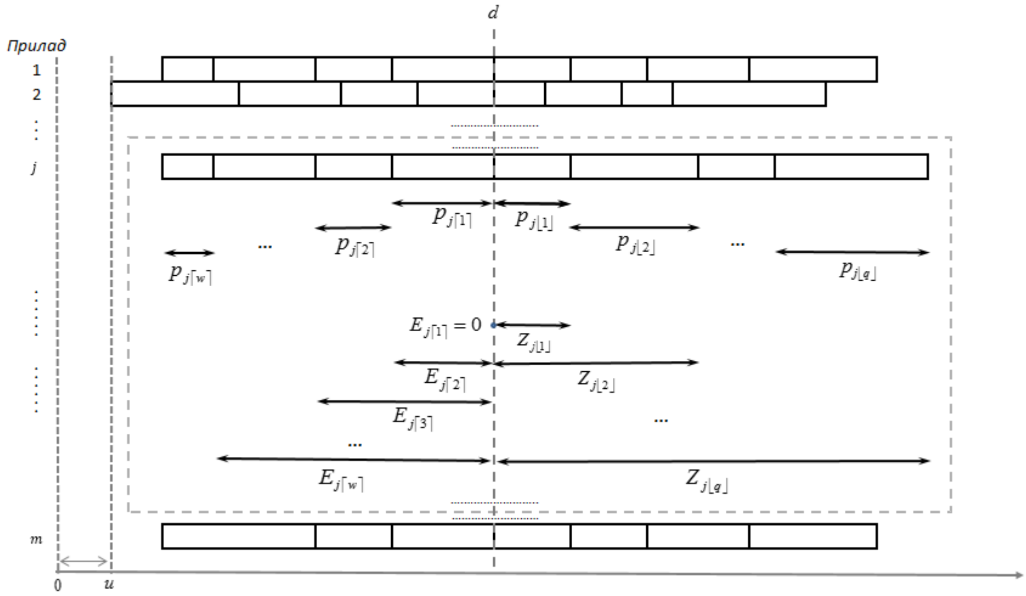


Рис.4. Позначення в розкладах з декількома пристроями

Примітка: на рис. 4 у пунктирному прямокутнику показано тривалості виконання, запізнення та випередження завдань, що виконуються j-м пристроєм.

З урахуванням введених позначень визначимо сумарне відхилення моментів закінчення від директивного строку (суму значень випереджень та запізнень):

$$E+Z=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{w_j}E_{j\lceil i\rceil}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{q_j}Z_{j\lfloor i\rfloor}$$

Сумарне випередження: $E=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{w_j}E_{j\lceil i\rceil}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{w_j-1}\sum_{i=1}^{k}p_{\lceil k\rceil}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{w_j-1}(w_j-i)p_{j\lceil i\rceil}$

Сума $\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{w_j-1}(w_j-i)p_{j\lceil i\rceil}$ не містить доданків, що відповідають завданням $p_{j\lceil w_j\rceil}$ (оскільки їх тривалості не впливають на значення $E_{j\lceil 1\rceil},E_{j\lceil 2\rceil},...,E_{j\lceil w_j\rceil}$), введемо в ці суми доданки, що відповідають $p_{j\lceil w_j\rceil}$, з коефіцієнтами 0: $\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{w_j}(w_j-i)p_{j\lceil i\rceil}$

Сумарне запізнення: $Z=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{q_j}Z_{j\lfloor i\rfloor}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{q_j}\sum_{i=1}^{k}p_{j\lfloor k\rfloor}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{q_j}(q_j-i+1)p_{j\lceil i\rceil}$..

Сумарне відхилення: $E+Z=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{w_j}(w_j-i)p_{j\lceil i\rceil}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{q_j}(q_j-i+1)p_{j\lceil i\rceil}$

Отже, $E+Z$ являє собою суму n доданків ($n=\sum_{j=1}^{m}\left(w_j+q_j\right)$), кожний з яких є добутком цілого числа на тривалість завдання. Кожна з n тривалостей бере участь у сумуванні один раз, а цілі числа, на які множаться тривалості (коефіцієнти цільової функції), мають значення, що показані в таблиці 1.

Таблиця 1

Значення коефіцієнтів ЦФ (множників при тривалостях завдань)

Номер пристрою	Коефіцієнти ЦФ	
	Завдання, що виконуються з випередженням (*W*)	Завдання, що запізнюються (*Q*)
1	$w_1-1,w_1-2,...,2,1,0$	$q_1,q_1-1,...,2,1$
2	$w_2-1,w_2-2,...,2,1,0$	$q_2,q_2-1,...,2,1$
…	…	…
m	$w_m-1,w_m-2,...,2,1,0$	$q_m,q_m-1,...,2,1$

Як бачимо, кількість завдань з коефіцієнтами 0 становить *m*, з коефіцієнтами 1 - становить 2*m*, з коефіцієнтами 2 - становить 2*m* і так далі. На рисунку 5 показано відповідність цих коефіцієнтів позиціям завдань у розкладі.

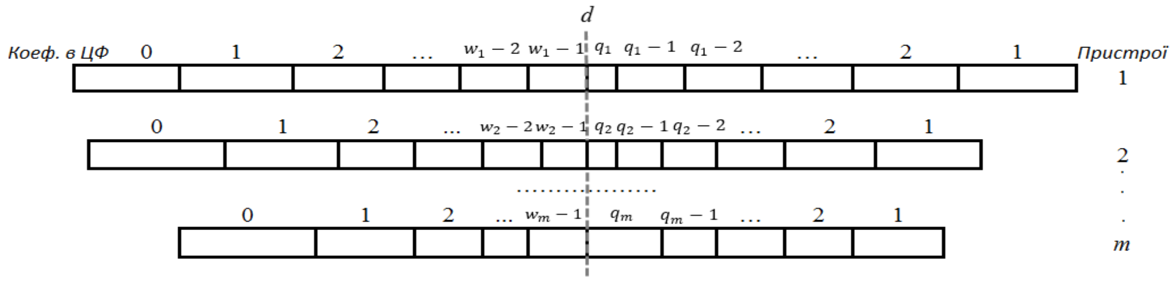


Рис.5. Відповідність коефіцієнтів ЦФ позиціям завдань у розкладі

Встановимо значення w_j, q_j, $j=\overline{1,m}$. Ці значення залежать від цілочисельності/нецілочисельності та парності/непарності частки ділення $\frac{n}{m}$. В таблиці 2 наведені значення кількостей завдань, що запізнюються та виконуються з випередженням на пристроях. В таблиці через $[\alpha]$ позначено цілу частину числа α - найбільше ціле, що задовольняє нерівності $[\alpha]\le\alpha$.

Таблиця 2

Цілочисельність/нецілочисельність, парність/непарність частки ділення $\frac{n}{m}$

<table>
<tr><td></td><td>Парність/ непарність</td><td>Значення w_i</td><td>Значення q_i</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$n \bmod m = 0$</td><td>$\frac{n}{m}$ - не парне</td><td>$w_1=w_2=\ldots=w_m=\dfrac{\frac{n}{m}+1}{2}$</td><td>$q_1=q_2=\ldots=q_m=\dfrac{\frac{n}{m}-1}{2}$</td></tr>
<tr><td>$\frac{n}{m}$ - парне</td><td>$w_1=w_2=\ldots=w_m=\dfrac{n}{2m}$</td><td>$q_1=q_2=\ldots=q_m=\dfrac{n}{2m}$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$n \bmod m = s$</td><td rowspan="4">$\frac{n}{m}$ - не парне</td><td colspan="2">для s пристроїв</td></tr>
<tr><td>$w_1=w_2=\ldots=w_s=\dfrac{\left[\frac{n}{m}\right]+1}{2}$</td><td>$q_1=q_2=\ldots=q_s=\dfrac{\left[\frac{n}{m}\right]-1}{2}+1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">для $m-s$ пристроїв</td></tr>
<tr><td>$w_{s+1}=\ldots=w_m=\dfrac{\left[\frac{n}{m}\right]+1}{2}$</td><td>$q_{s+1}=\ldots=q_m=\dfrac{\left[\frac{n}{m}\right]-1}{2}$</td></tr>
</table>

		для s пристроїв	
	$\frac{n}{m}$ - парне	$w_1 = w_2 = ... = w_s = \frac{\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor + 1}{2}$	$q_1 = q_2 = ... = q_s = \frac{\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor}{2}$
		для $m - s$ пристроїв	
		$w_{s+1} = ... = w_m = \frac{\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor}{2}$	$q_{s+1} = ... = q_m = \frac{\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor}{2}$

Для мінімізації сумарного відхилення необхідно розподіляти завдання між пристроями за правилом «найдовшому завданню повинен відповідати найменший коефіцієнт ЦФ». Отже, алгоритм розподілу завдань між паралельними пристроями полягає у наступному:

КРОК 1. Впорядкувати завдання за незростанням тривалостей ($p_1 \geq p_2 \geq ... \geq p_n$).

КРОК 2. Впорядкувати значення коефіцієнтів ЦФ за неспаданням.

КРОК 3. ЦИКЛ по завданням

Завдання i (завдання з поточної множини непризначених завдань, яке має максимальну тривалість) призначити на пристрій з найменшим вільним коефіцієнтом ЦФ (який визначає позицію завдання в упорядкуванні відповідного пристрою).

Згідно алгоритму, спочатку заповнюються перші позиції всіх пристроїв (їм відповідають коефіцієнти 0), потім останні позиції всіх пристроїв (їм відповідають коефіцієнти 1), після цього – другі позиції всіх пристроїв (їм відповідають коефіцієнти 1) і т.д.

Згідно алгоритму, його трудомісткість визначається такими процедурами: сортування тривалостей завдань (трудомісткість якої $n \cdot \log n$), сортування коефіцієнтів ЦФ (трудомісткість якої також $n \cdot \log n$). Отже трудомісткість алгоритму така: $O(n \cdot \log n)$.

Приклад 1

Задано $n = 25$ завдань та $m = 3$ ідентичних пристроїв. Тривалість виконання завдань задано вектором:

$p = \{20,18,16,13,12,12,11,11,10,10,10,9,8,8,8,7,6,6,5,5,4,3,3,3,2\}$.

На рис.6 показано оптимальний розклад виконання цих завдань (у прямокутниках вказано номер завдання та тривалість його виконання на пристрої, над прямокутниками вказані значення коефіцієнтів ЦФ).

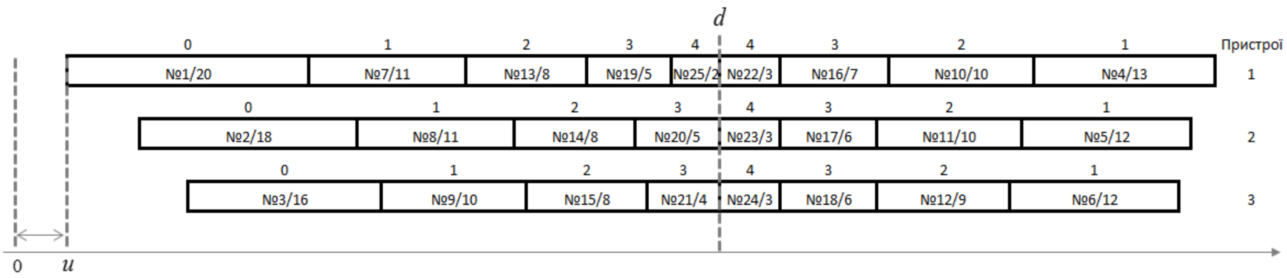


Рис.6. Оптимальний розклад для системи з прикладу 1

Складання розкладу для декількох пропорційних пристроїв.

Визначимо для цього випадку сумарне відхилення моментів закінчення від директивного строку:

Сумарне випередження:

$$E = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{w_j} E_{j\lceil i \rceil} = \sum_{j=1}^{m} h_j \sum_{k=1}^{w_j - 1} \sum_{i=1}^{k} p_{\lceil k \rceil} = \sum_{j=1}^{m} h_j \sum_{i=1}^{w_j - 1} (w_j - i) p_{j\lceil i \rceil}$$

Сумарне запізнення:

$$Z = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{q_j} Z_{j\lfloor i \rfloor} = \sum_{j=1}^{m} h_j \sum_{k=1}^{q_j} \sum_{i=1}^{k} p_{j\lfloor k \rfloor} = \sum_{j=1}^{m} h_j \sum_{i=1}^{q_j} (q_j - i + 1) p_{j\lceil i \rceil}.$$

Сумарне відхилення: $E + Z = \sum_{j=1}^{m} h_j \sum_{i=1}^{w_j} (w_j - i) p_{j\lceil i \rceil} + \sum_{j=1}^{m} h_j \sum_{i=1}^{q_j} (q_j - i + 1) p_{j\lceil i \rceil}$

Отже, $E + Z$ являє собою суму n доданків ($n = \sum_{j=1}^{m} (w_j + q_j)$), кожний з яких є добутком коефіцієнту продуктивності j-го пристрою, цілого числа (що відповідає позиції завдання у розкладі відповідного пристрою) і тривалості завдання. Назвемо *складеним коефіцієнтом* добуток коефіцієнта продуктивності пристрою на ціле число. Кожна з n тривалостей бере участь у сумуванні один раз, а складені коефіцієнти мають значення, що показані в таблиці 3.

Таблиця 3

Значення складених коефіцієнтів

Номер пристрою	Складені коефіцієнти	
	Завдання, що виконуються з випередженням (*W*)	Завдання, що запізнюються (*Q*)
1	$h_1(w_1-1), h_1(w_1-2), ..., 2h_1, 1h_1, 0$	$h_1q_1, h_1(q_1-1), ..., 2h_1, 1h_1$
2	$h_2(w_2-1), h_2(w_2-2), ..., 2h_2, 1h_2, 0$	$h_2q_2, h_2(q_2-1), ..., 2h_2, 1h_2$
…	…	…
m	$h_m(w_m-1), h_m(w_m-2), ..., 2h_m, 1h_m, 0$	$h_mq_m, h_m(q_m-1), ..., 2h_m, 1h_m$

Для мінімізації сумарного відхилення необхідно розподіляти завдання між пристроями за правилом «найдовшому завданню повинен відповідати найменший складений коефіцієнт ЦФ». Отже, алгоритм розподілу завдань між пропорційними пристроями полягає у наступному:

КРОК 1. Впорядкувати завдання за незростанням тривалостей ($p_1 \geq p_2 \geq ... \geq p_n$).

КРОК 2. Впорядкувати значення коефіцієнтів ЦФ за неспаданням.

КРОК 3. ЦИКЛ по завданням

Завдання i (завдання з поточної множини непризначених завдань, яке має максимальну тривалість) призначити на ту позицію у розкладі, якій відповідає найменший вільний складений коефіцієнт.

Трудомісткість алгоритму: $O(n \cdot \log n)$.

Приклад 2

Задано $n = 25$ завдань та $m = 3$ пристроїв. Коефіцієнти продуктивності пристроїв мають значення: $h_1 = 1,\ h_2 = 1{,}3,\ h_3 = 1{,}8$. Тривалість виконання завдань на еталонному пристрої задано вектором:

$p = \{20,18,16,13,12,12,11,11,10,10,10,9,8,8,8,7,6,6,5,5,4,3,3,3,2\}$.

На рис.7 показано оптимальний розклад виконання завдань (у прямокутниках вказано номер завдання та тривалість його виконання на відповідному пристрої, над прямокутниками вказані значення складених коефіцієнтів).

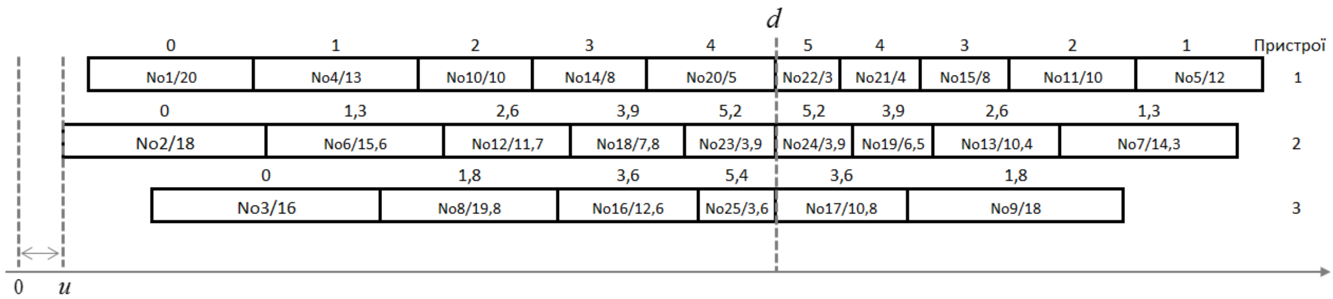


Рис.7. Оптимальний розклад для системи з прикладу 2

Висновки

Розглянута задача складання розкладу виконання завдань декількома пристроями з метою мінімізації сумарного відхилення від директивних строків. Досліджено два випадки: пристрої є ідентичними, пристрої є пропорційними; а також частковий випадок – складання розкладу для одного пристрою. Передбачалось, що початок розкладу (момент запуску) може бути зсунений вправо від нульового моменту часу на будь-який термін, тобто директивний строк має достатньо велике значення і допускає будь-які можливі значення моменту запуску розкладів. Це допущення дозволило розробити для задач, що розглядались, поліноміальні алгоритми побудови оптимальних розкладів.

Література:

1. Лоулер Е. Л. «Псевдополіноміальний» алгоритм для послідовності завдань задля мінімізації сумарного запізнення / Е. Л. Лоулер, П. Л. Хаммер, Е. Л. Джонсон // Вивчення цілочисельного програмування, том 1 – Літопис дискретного програмування, – 1977. – с. 331–342.

2. Азізголу М. Мінімізація запізнення на паралельних машинах / М. Азізголу, О. Кірка // Міжнародний журнал економіки виробництва — 1998. —№. 2 — р. 163-168.

3. Vahid Kayvanfar Minimizing total tardiness and earliness on unrelated parallel machines with controllable processing times / Vahid Kayvanfar, Gh. M. Komaki, Amin Aalaei, M. Zandieh // Computers and Operations Research archive. Volume 41, – January 2014. – p. 31-43. Elsevier Science Ltd. Oxford, UK.

4. Мінухін С. В. Дослідження алгоритмів мінімізації сумарного часу запізнювання завдань з директивними строками виконання на основі рангового підходу / С. В. Мінухін, Д. С. Лєнько, М. І. Сухонос // Системи обробки інформації, випуск 4 (102), том 1. Харків. – 2012 – с. 35-41.

5. Сурд Ф. Задача зі штрафами за запізнення і випередження для одного пристрою / Ф. Сурд, С. Кедад-Сідхум // Журнал календарного планування, – 2003. – №. 6 – с. 533–549.

6. Сурд Ф. Новий точний алгоритм планування з випередженням/запізненням для одного пристрою / Ф. Сурд // ІНФОРМ Журнал про обчислення – 2009. – №. 21 – с. 167–175.

7. Танака С. Точний алгоритм для загального одномашинного планування з часом простою, що базується на алгоритмі динамічного програмування / С. Танака, С. Фуджикума // Журнал календарного планування – 2012. – №. 15 – с. 347–361

8. Кварацхелія А. Г. Методи вирішення задачі мінімізації сумарного запізнення для одного пристрою і задачі розбиття [Електронний ресурс] / А. Г. Кварацхелія // Наукова бібліотека дисертацій і авторефератів disserCat. – 2007. Режим доступу: http://www.dissercat.com/content/metody-resheniya-zadachi-minimizatsii-summarnogo-zapazdyvaniya-dlya-odnogo-pribora-i-zadachi#ixzz4Umeb7h8m

9. Мельник О. О. Дослідження властивостей алгоритму складання розкладів за критерієм сумарного випередження і запізнення із *налагодженнями, що залежать від послідовності [Електронний ресурс]/ О. О. Мельник // Наукова бібліотека ЧНТУ – 2012. Режим доступу: http://tst.stu.cn.ua/ index.pl?task=arcl&l=ru&j=1&id=19*

10. Конвей Р.В. Теория рас писаний / Конвей Р. В., Максвелл В. Л., Миллер Л. В. – М.: Физматгиз, Наука, 1975. – 359 с.

References:

1. Louler E.L. «Psevdopolinomialjnyj» alghorytm dlja poslidovnosti zavdanj zadlja minimizaciji sumarnogho zapiznennja / E. L. Louler, P. L. Khammer, E. L. Dzhonson // Vyvchennja cilochyseljnogho proghramuvannja, tom 1 – Litopys dyskretnogho proghramuvannja, – 1977. – s. 331–342.

2. Azizgholu M. Minimizacija zapiznennja na paraleljnykh mashynakh / M. Azizgholu, O. Kirka // Mizhnarodnyj zhurnal ekonomiky vyrobnyctva — 1998. — № 2 — p. 163-168.

3. Vahid Kayvanfar Minimizing total tardiness and earliness on unrelated parallel machines with controllable processing times / Vahid Kayvanfar, Gh. M. Komaki, Amin Aalaei, M. Zandieh // Computers and Operations Research archive. Volume 41, – January, 2014. – p. 31-43. Elsevier Science Ltd. Oxford, UK.

4. Minukhin S.V. Doslidzhennja alghorytmiv minimizaciji sumarnogho chasu zapiznjuvannja zavdanj z dyrektyvnymy strokamy vykonannja na osnovi ranghovogho pidkhodu / S. V. Minukhin, D. S. Ljenjko, M. I. Sukhonos // Systemy obrobky informaciji, vypusk 4 (102), tom 1. Kharkiv. – 2012 – s. 35-41.

5. Surd F. Zadacha zi shtrafamy za zapiznennja i vyperedzhennja dlja odnogho prystroju / F. Surd, S. Kedad-Sidkhum // Zhurnal kalendarnogho planuvannja, – 2003. – № 6 – s. 533–549.

6. Surd F. Novyj tochnyj alghorytm planuvannja z vyperedzhennjam/zapiznennjam dlja odnogho prystroju / F. Surd // INFORM Zhurnal pro obchyslennja – 2009. – № 21 – s. 167–175.

7. Tanaka S. Tochnyj alghorytm dlja zaghaljnogho odnomashynnogho planuvannja z chasom prostoju, shho bazujetjsja na alghorytmi dynamichnogho proghramuvannja / S. Tanaka, S. Fudzhykuma // Zhurnal kalendarnogho planuvannja – 2012. – № 15 – s. 347–361

8. Kvarackhelija A. Gh. Metody vyrishennja zadachi minimizaciji sumarnogho zapiznennja dlja odnogho prystroju i zadachi rozbyttja [Elektronnyj resurs] / A. Gh. Kvarackhelija // Naukova biblioteka dysertacij i avtoreferativ disserCat. – 2007. Rezhym dostupu: http://www.dissercat.com/content/metody-resheniya-zadachi-minimizatsii-summarnogo-zapazdyvaniya-dlya-odnogo-pribora-i-zadachi#ixzz4Umeb7h8m

9. Meljnyk O. O. Doslidzhennja vlastyvostej alghorytmu skladannja rozkladiv za kryterijem sumarnogho vyperedzhennja i zapiznennja iz nalaghodzhennjamy, shho zalezhatj vid poslidovnosti [Elektronnyj resurs] / O. O. Meljnyk // Naukova biblioteka ChNTU – 2012. Rezhym dostupu: http://tst.stu.cn.ua/ index.pl?task=arcl&l=ru&j=1&id=19

10. Konvey R. V. Teoriya ras pisaniy / Konvey R. V., Maksvell V. L., Miller L. V. – M.: Fizmatgiz, Nauka, 1975. – 359 s.